

# Capitolo 1

## PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

### 1.1 Principio di sovrapposizione in ottica ondulatoria: esperimento di Young

Una sorgente S emette un'onda luminosa monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$ , come illustrato in Fig.1.1. Il fronte d'onda (piano se distante dalla sorgente) incontra uno schermo Sc dove sono praticate due fenditure (puntiformi) F1 ed F2 a distanza  $D \simeq \lambda$  l'una dall'altra. Le due fenditure, una volta investite dall'onda, diventano sorgenti coerenti (in accordo di fase) di onde sferiche uscenti.

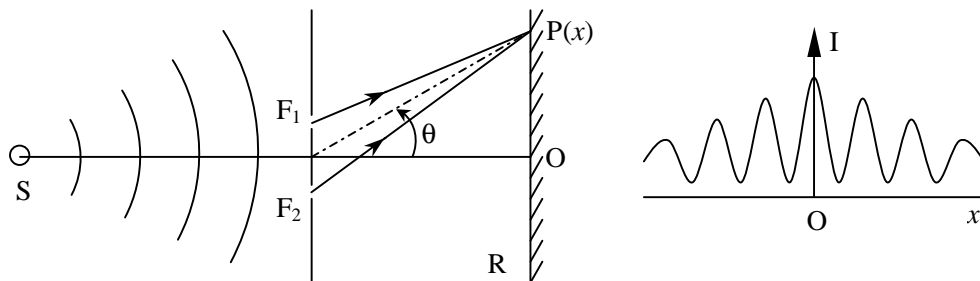


Figura 1.1: Esperimento di Young (sinistra) e figura di interferenza (destra)

Nel punto generico P sul rivelatore R le due onde interferiscono non più in accordo di fase poiché hanno percorso distanze diverse per raggiungere il punto P; tuttavia mantengono una relazione di fase, che è determinata dai rispettivi cammini ottici. Nel punto P i rispettivi campi elettrici hanno la forma

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (1.1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i(kx_2 - \omega t)} \quad (1.2)$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le distanze di P dalla due fenditure e  $k$  è il numero d'onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  con  $\lambda$  lunghezza d'onda. Secondo l'ottica ondulatoria il punto P è sede di un campo elettrico che è la somma vettoriale dei due campi elettrici (**principio di sovrapposizione**) e quindi l'intensità luminosa è data dal modulo quadro del campo risultante

$$I = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = 2I_0[1 + \cos(k\Delta x)] \quad (1.3)$$

$$= 4I_0 \cos^2 \left[ \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \right] \quad (1.4)$$

dove  $I_0 = |\vec{E}_1|^2 = |\vec{E}_2|^2$  è l'intensità di ciascuna componente e  $\Delta x = x_1 - x_2$ . L'angolo  $\theta$  misura la direzione di P rispetto all'orizzontale (vedi Fig.1.1). Al variare di P (o  $\theta$ ) sul rivelatore R si susseguono massimi ( $I = 4I_0$ ) e minimi ( $I = 0$ ) di interferenza. Il primo massimo si ha per  $\theta = 0$ , il secondo per

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D} \quad (1.5)$$

Se  $\lambda/D \ll 1$  (oppure  $\lambda \ll D$ ) i massimi non sono distinguibili. L'interferenza insieme con la diffrazione sono la prova più diretta della natura ondulatoria della luce.

## 1.2 Interferenza di neutroni: ampiezze di probabilità

Il principio di sovrapposizione non è applicabile a particelle classiche. Immaginiamo infatti di ripetere lo stesso esperimento con una sorgente S di particelle. Queste, viaggiando su traiettorie definite, o passano per la fenditura F1 o passano per la fenditura F2 (ignoriamo quelle che non passano), quindi il numero di particelle (intensità) che arriva nel punto P è la somma di quelle che passano da F1 e quelle che passano da F2, cioè

$$I = I_1 + I_2 \quad (1.6)$$

Non c'è spazio per nessun fenomeno di interferenza. Tuttavia l'esperimento, realizzato con sorgenti di neutroni lenti in tempi recenti (A. Zeilinger et al., Rev. Mod. Phys. **60** (1988) 1067), è sorprendentemente contrario all'aspettativa. Infatti i risultati mostrati in Fig.?? rivelano una struttura d'intensità nei rivelatori con massimi e minimi tipici di un fenomeno di interferenza. Agli albori della meccanica quan-

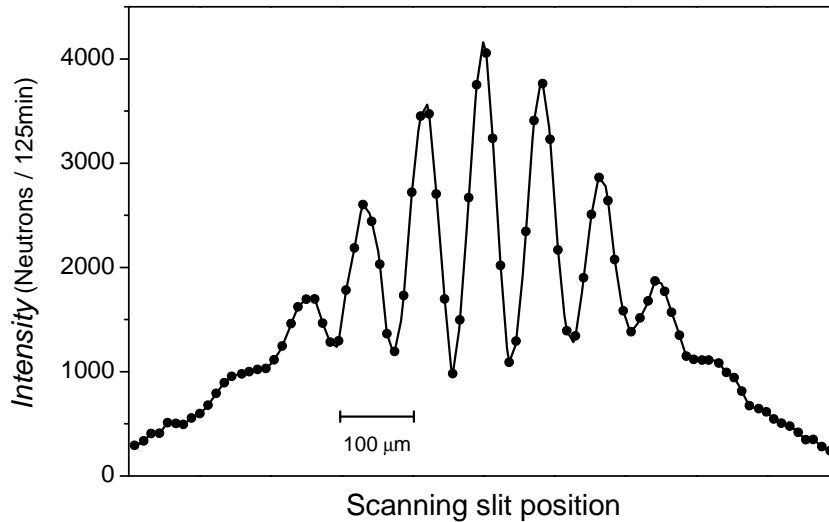


Figura 1.2: Interferenza di neutroni

tistica per spiegare la presunta natura ondulatoria delle particelle (già manifestatasi nell'esperimento di Davisson e Germer) de Broglie aveva associato a ciascuna particella un'onda di materia la cui lunghezza d'onda sarebbe collegata all'impulso della particella dalla relazione

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.7)$$

dove  $h$  è una costante, in seguito identificata con la costante di Planck. L'ipotesi di onda di materia si è poi rivelata infondata.

D'altra parte esperimenti come l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton hanno messo in evidenza che la radiazione può anche manifestare una struttura corpuscolare (fotoni) quand'è in interazione con la materia .

Pertanto il comportamento ondulatorio delle particelle ed il comportamento corpuscolare della radiazione richiedono un riesame del principio di sovrapposizione come chiave interpretativa dei fenomeni di interferenza. in un quadro unitario, che supera la suddivisione onda-corpuscolo lasciata in eredità dalla meccanica classica (cfr. La Fisica di Feynman, Vol.III) .

Riferendoci alla Fig.1.1, immaginiamo ora che S emetta particelle, siano esse neutroni o fotoni. Le particelle siano emesse una alla volta (ipotesi di sorgente debole) di modo che un esperimento con  $N$  particelle equivalga ad  $N$  esperimenti con una sola particella, tutti eseguiti nelle stesse condizioni sperimentali. In un singolo esperimento la particella attraversa una fenditura e raggiunge un punto P di coordinata  $x$  del rivelatore R. Ripetendo l'esperimento  $N$  volte troveremo che le  $N$  particelle, che hanno attraversato lo schermo con le due fenditure (ci possiamo dimenticare delle altre) sono distribuite in tutti i punti del rivelatore; se  $N$  è molto grande potremo definire la probabilità  $P(x)$  che la particella raggiunga il rivelatore nel punto P come il numero di particelle che hanno raggiunto  $x$  diviso il numero totale  $N$ . Come già constatato nell'esperimento con neutroni la probabilità si distribuisce con massimi e minimi formando una figura di interferenza, che dobbiamo attribuire alla presenza di entrambe le due fenditure aperte. Se le particelle si comportassero come particelle classiche il numero di particelle che raggiungono  $x$  sarebbe uguale al numero  $N_1(x)$  di particelle che hanno attraversato la fenditura F1 *quando* F2 è chiusa più il numero  $N_2(x)$  di particelle che hanno attraversato la fenditura F2 *quando* F1 è chiusa e quindi

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad \text{caso classico} \quad (1.8)$$

Ma la somma delle probabilità non dà luogo ad interferenza. E' come quando uno somma direttamente le intensità invece che i campi elettrici nell'ottica ondulatoria. Quello che si trova è invece

$$P(x) \neq P_1(x) + P_2(x) \quad \text{caso quantistico} \quad (1.9)$$

Nell'ottica ondulatoria seguendo il principio di sovrapposizione uno prima somma i campi e poi fa il modulo quadro. Questo genera quel termine addizionale che è responsabile della interferenza. Nel caso delle particelle l'interferenza ci suggerisce che un analogo principio di sovrapposizione debba presiedere l'interpretazione del fenomeno. *Ma qual'è la grandezza che si deve sovrapporre?* Ora non ci sono campi elettrici da sommare. Cominciamo col definire una ampiezza di probabilità associata a ciascun evento fisico. Nell'esperimento in considerazione abbiamo due possibili eventi: l'evento  $E_1$  consistente nella emissione di una particella dalla sorgente S, passaggio della stessa dalla fenditura F1 e rivelazione nel punto  $x$  del rivelatore R, cioè

$$\text{evento } E_1 : S \rightarrow F1 \rightarrow R(x) \quad (1.10)$$

e l'evento  $E_2$  consistente nella emissione di una particella dalla sorgente S, passaggio della stessa dalla fenditura F2 e rivelazione nello stesso punto  $x$  del rivelatore R, cioè

$$\text{evento } E_2 : S \rightarrow F2 \rightarrow R(x). \quad (1.11)$$

A ciascun evento  $E_i$  associamo una **ampiezza di probabilità**  $A_i(x)$ , il cui modulo quadro è la probabilità dell'evento in assenza di eventi alternativi. Quindi nel nostro caso definiamo

$$P_1(x) = |A_1(x)|^2 \quad P_2(x) = |A_2(x)|^2 \quad (1.12)$$

quando una delle due fenditure è aperta e l'altra è chiusa. Osserviamo che l'ampiezza  $A_i$  è determinata dal numero di particelle che arrivano in P, quindi dal risultato di una operazione di misura. Non è però definita la sua fase trattandosi di un numero complesso, almeno sin quando l'esperimento viene eseguito con una sola fenditura aperta.

Quando i due eventi si presentano simultaneamente, cioè entrambe le fenditure sono aperte, il principio di sovrapposizione suggerisce di sommare prima le ampiezze e poi fare il modulo quadro

$$P(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 = P_1(x) + P_2(x) + \text{termine misto}. \quad (1.13)$$

Come nel caso delle onde (vedi Eq. (3)) il termine misto è responsabile della interferenza. Ora la fase relative delle due ampiezze è determinata, essendo quella che dà luogo al termine misto. L'ipotesi fisica che soggiace al principio di sovrapposizione è che i due eventi non sono mutuamente esclusivi come vorrebbe la concezione classica che associa alla particella una traiettoria per cui o questa passa dalla fenditura F1 o dalla fenditura F2. Dal nuovo punto di vista, volendo adoperare ancora il concetto classico di traiettoria, è come se la particella, prima di giungere sullo schermo con le fenditure, condividesse simultaneamente due traiettorie ed al momento di attraversare lo schermo *decidesse* da quale fenditura passare. La sua decisione non è arbitraria ma dipende dalle ampiezze di probabilità. Come determinare queste ampiezze è lo scopo della meccanica quantistica.

### 1.3 Esperimento di Stern-Gerlach

Il principio di sovrapposizione non si applica solo alla interferenza di neutroni o fotoni, ma a tutti i fenomeni quantistici. Ne esaminiamo ora uno particolarmente istruttivo, cioè l'esperimento di Stern e Gerlach.

Un fascetto di atomi di argento preparati dalla sorgente S, attraversa la regione compresa fra le espansioni di una calamita e raggiunge un rivelatore R, come illustrato in Fig.??.

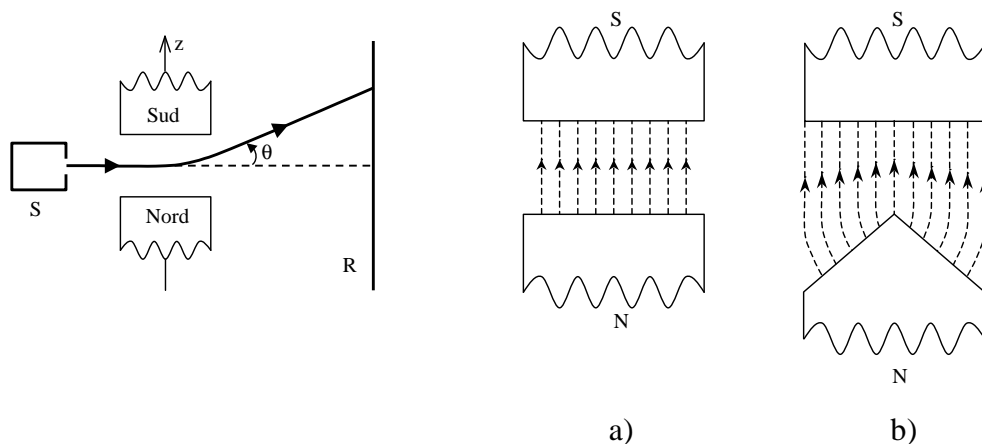


Figura 1.3: Esperimento di Stern e Gerlach con campo magnetico omogeneo (a) e disomogeneo (b).

Se il campo magnetico  $B$  (diretto lungo l'asse  $z$ ) è costante (Fig.??a) il fascetto prosegue indeflesso e si concentra nel punto  $O$  del rivelatore  $R$ . Se però si crea una disomogeneità di  $B$  lungo l'asse  $z$  deformando per esempio una delle espansioni della calamita, come illustrato in Fig.??b, allora si desta una forza che sdoppia il fascetto ed i singoli atomi si concentrano su due punti del rivelatore simmetrici rispetto ad  $O$ . Questo succede con gli atomi di Ag, mentre in generale il numero di componenti in cui si sdoppia il

fascetto dipende dal momento angolare del tipo di atomi in considerazione, e comunque vale per atomi paramagnetici, cioè che hanno un momento magnetico permanente. Finora l'esperimento! Vedremo ora che l'interpretazione classica è in disaccordo con il risultato sperimentale. Ciascun elettrone atomico ha un momento angolare orbitale  $\vec{l}$  dovuto alla rotazione attorno al nucleo e un momento angolare di spin  $\vec{s}$  dovuto alla rotazione intrinseca. I due momenti angolari si compongono per dare il momento angolare totale

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \tag{1.14}$$

I momenti angolari dei singoli elettroni nell'atomo si compongono a loro volta per dare il momento angolare totale dell'atomo. Generalmente si considerano solo gli elettroni di valenza poichè i momenti angolari degli elettroni negli orbitali più interni si cancellano. Nel caso dell'atomo d'argento c'è un solo elettrone di valenza, che occupa nello stato fondamentale un orbitale s ( $l = 0$ ). Quindi l'atomo di argento ha un momento angolare totale pari allo spin dell' elettrone. Poiché gli elettroni sono particelle cariche l'atomo ha anche un momento magnetico proporzionale al momento angolare, cioè  $\vec{m} = \text{cost} * \vec{j}$ . Sotto l'azione di un campo magnetico  $\vec{B}$  costante e diretto lungo l'asse z, si esercita sull'atomo una forza lungo z (ignoriamo le altre componenti che generano una precessione attorno all'asse z) pari a

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z}(-\vec{m} \cdot \vec{B}) = m \frac{\partial B_z}{\partial z} \cos\theta \tag{1.15}$$

dove la quantità in parentesi è giusto il potenziale del campo e  $\theta$  è l'angolo tra  $\vec{m}$  e l'asse z. Quando  $B_z$  è costante la forza sull'atomo è nulla e il fascetto non viene deflesso, ma se  $B_z$  non è costante (campo disomogeneo nella direzione z) il fascetto subisce una deflessione di un angolo  $\theta$ . La massima deflessione si ha quando  $\vec{m}$  è parallelo (verso l'alto) o antiparallelo (verso il basso) all'asse z. Ora, poichè nel fascetto uscente da S i momenti angolari degli atomi sono distribuiti in maniera isotropa, ci si aspetterebbe classicamente che gli atomi arrivino su S uniformemente distribuiti in tutti i punti corrispondenti alla massima deflessione verso l'alto e la massima deflessione verso il basso. Sperimentalmente invece si osserva che gli atomi si concentrano nei due punti di massima deflessione, diciamo A e B, *come se le sole possibili direzioni di  $\vec{m}$  fossero o parallela o antiparallela rispetto all'asse z* (vedi Fig.??). Se per qualche

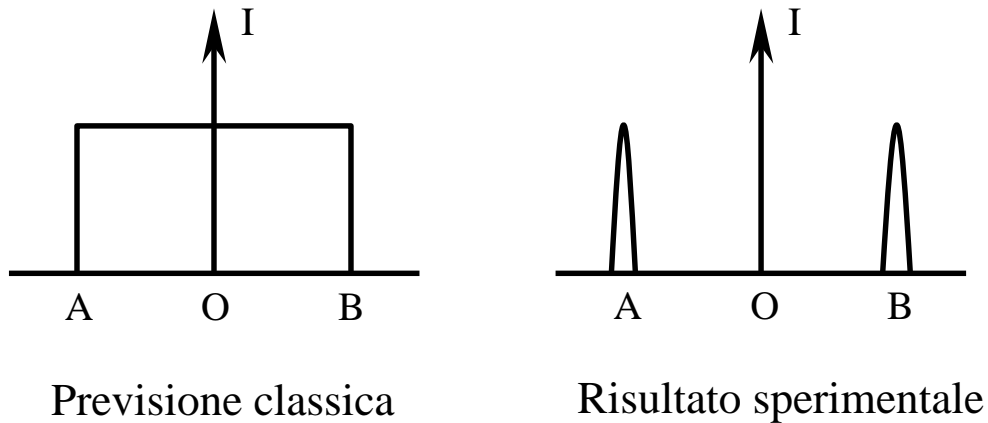


Figura 1.4: Intensità di atomi sullo schermo

motivo la distribuzione dei momenti angolari degli atomi nella sorgente non è isotropa, le intensità dei due fascetti sono diverse, ma i punti in cui si concentrano sono sempre A e B. Se cambiamo atomi invece di due fascetti se ne possono avere più di due. Vedremo che il numero di fascetti in cui si decompone

il fascio incidente sul campo magnetico disomogeneo dipende dal momento angolare totale degli atomi in considerazione, ma la distribuzione è comunque concentrata in punti privilegiati. Si parla quindi di quantizzazione spaziale.

## 1.4 Principio di sovrapposizione delle ampiezze di probabilità

Diciamo innanzitutto che l'apparato di Stern-Gerlach serve a misurare il momento angolare totale di atomi paramagnetici, poiché, come vedremo nel Cap. VII, il numero di componenti in cui si divide il fascetto è direttamente collegato al valore del momento angolare della specie atomica in considerazione. Ma si può adoperare anche per misurare il grado di polarizzazione del momento angolare degli atomi nella sorgente S. Quest'ultimo è dato dall'intensità relativa delle due componenti o equivalentemente dalla quantità

$$\frac{I_A - I_B}{I_A + I_B} \quad (1.16)$$

Nelle condizioni sperimentali di sorgente debole viene emesso un atomo di argento alla volta. Quindi, l'esperimento con N atomi equivale ad N esperimenti con un solo atomo eseguiti tutti nelle stesse condizioni sperimentali. Il singolo atomo qualche volta va in A qualche volta va in B in maniera casuale. Tuttavia dopo N ripetizioni dell'esperimento (N molto grande) possiamo constatare che le frequenze  $N_A/N$  e  $N_B/N$  non cambiano apprezzabilmente. Possiamo dar loro il valore di probabilità. Questa è una proprietà della natura su scala microscopica: si comporta in modo probabilistico come nell'esperimento delle due fenditure. In rapporto a questo comportamento dobbiamo costruire una teoria che descriva i fenomeni naturali in termini di leggi probabilistiche. Non si tratta, come vedremo, di rinunciare al determinismo, ma al determinismo classico (corrispondenza uno a uno tra stato iniziale e stato finale).

Vogliamo ora cominciare a descrivere il formalismo della MQ. Per far questo partiamo dal dato sperimentale costituito dai due stati di polarizzazione dell'atomo di argento osservati (punti A e B nel rivelatore) e dalle intensità di atomi rivelate in ciascun punto. Chiameremo lo stato in A come  $\uparrow$  e lo stato in B come  $\downarrow$ . Per ognuno di essi l'esperimento ci da una probabilità

$$P_{\uparrow} = \frac{I_A}{I} \quad P_{\downarrow} = \frac{I_B}{I} \quad (1.17)$$

La probabilità dipende naturalmente dallo stato di polarizzazione degli atomi di argento preparati dalla sorgente S. Se questi partono già dalla sorgente nello stato di polarizzazione  $\uparrow$  allora  $P_{\uparrow} = 1$  e  $P_{\downarrow} = 0$ . Viceversa, se partono polarizzati  $\downarrow$  allora  $P_{\downarrow} = 1$  e  $P_{\uparrow} = 0$ . Come descrivere lo stato di polarizzazione degli atomi della sorgente nei casi in cui entrambe le probabilità sono diverse da zero? Come nel caso della interferenza da due fenditure dobbiamo ammettere che il singolo atomo di argento, prima di attraversare il campo magnetico, *condivida* i due possibili stati di polarizzazione finali ed al momento di attraversare il campo *decida* su quale stato portarsi. Questo è il modo in cui funziona il principio di sovrapposizione in MQ. Assumiamo di descrivere gli stati di polarizzazione iniziale e finale con vettori di stato di uno spazio astratto a due dimensioni (spazio di Hilbert), che indicheremo, seguendo la notazione di Dirac, nel modo seguente

$$\text{sorgente} : |s\rangle, \quad \text{stato in A} : |\uparrow\rangle, \quad \text{stato in B} : |\downarrow\rangle \quad (1.18)$$

In forza del principio di sovrapposizione lo stato della sorgente si scrive allora

$$|s\rangle = A_{\uparrow}|\uparrow\rangle + A_{\downarrow}|\downarrow\rangle \quad (1.19)$$

I coefficienti  $A_{\uparrow,\downarrow}$  danno informazione sul peso relativo con cui ciascuno stato finale di polarizzazione entra nella sovrapposizione. Quindi è plausibile assumere che questi siano in relazione con le probabilità relative. Definiamo quindi

$$P_{\uparrow} = |A_{\uparrow}|^2 \quad P_{\downarrow} = |A_{\downarrow}|^2 \quad (1.20)$$

I coefficienti  $A_{\uparrow,\downarrow}$  sono necessariamente numeri complessi e quindi lo spazio di Hilbert in cui sono definiti i vettori di stato di polarizzazione è complesso. La ragione di ciò sarà chiarita nel seguito. In questo caso il prodotto scalare tra due vettori è definito come il prodotto dell'uno per il duale dell'altro (il vettore duale è quello avente come componenti le complesse coniugate delle componenti del vettore dato). Il duale del vettore  $|s\rangle$  viene indicato con  $\langle s|$ . Seguendo tale notazione il prodotto scalare si scrive

$$\langle s'| \cdot |s\rangle \equiv \langle s'|s\rangle \quad (1.21)$$

Da questa definizione segue che il complesso coniugato di  $\langle s'|s\rangle$  si ottiene scambiando i due stati, cioè

$$\langle s'|s\rangle^* = \langle s|s'\rangle \quad (1.22)$$

I due stati di polarizzazione finali sono alternativi. Infatti, se gli atomi di argento vengono prima polarizzati paralleli all'asse  $z$  (mediante un altro Stern-Gerlach) allora verranno deflessi tutti in A, se vengono polarizzati antiparalleli all'asse  $z$  verranno deflessi tutti in B. Questa proprietà si traduce geometricamente nella ortogonalità dei due stati; inoltre si può anche assumere che ciascuno di essi sia di modulo unitario. Quindi

$$\langle \uparrow | \downarrow \rangle = 0 \quad (1.23)$$

$$\langle \uparrow | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 1 \quad (1.24)$$

I due stati formano quindi un insieme completo ortonormale nello spazio di Hilbert bidimensionale associato agli stati di polarizzazione della sorgente. Completezza significa che qualunque stato della sorgente di atomi di argento può essere espresso come combinazione lineare dei due stati finali. Questo è anche un fatto sperimentale giacché, comunque preparo il fascetto, gli atomi si distribuiscono sempre e solo fra i due stati  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ . Proiettando su ciascuno dei due stati finali si hanno le relazioni

$$P_{\uparrow} = |A_{\uparrow}|^2 = |\langle \uparrow | s \rangle|^2 \quad P_{\downarrow} = |A_{\downarrow}|^2 = |\langle \downarrow | s \rangle|^2 \quad (1.25)$$

che giustificano l'interpretazione di  $A_{\downarrow,\uparrow}$  come **ampiezze di probabilità**. Consideriamo il modulo quadro dello stato della sorgente

$$\langle s|s\rangle = P_{\uparrow} + P_{\downarrow} = 1 \quad (1.26)$$

che segue dal fatto che non ci sono altri stati finali di polarizzazione. Questa equazione vale qualunque sia lo stato iniziale della sorgente: le probabilità cambiano ma la loro somma deve essere uguale ad 1. Segue da qui una proprietà generale degli stati in MQ, cioè solo la loro direzione ha significato fisico. Il loro modulo, non avendo significato fisico, può essere arbitrario e quindi si può normalizzare ad 1, come nel caso precedente.